Topologia
Lista 3 (operacje na zbiorach, baza topologii)

Zad 1. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie wyposażony w topologię indukowaną z prostej euklidesowej $\mathbb{R}$.

a) Niech $X = [0,1]$. Które ze zbiorów $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2})$, $A_3 = [\frac{1}{3}, 1]$, $A_4 = (0,1)$ są otwarte, a które domknięte w X?

b) Niech $X = (0,1)$. Które ze zbiorów $A_1 = (0,1)$, $A_2 = (0, \frac{1}{2})$, $A_3 = [\frac{1}{3}, 1)$, $A_4 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ są otwarte, a które domknięte w X?

c) Niech $X = \mathbb{N}$. Wypisać topologię na X.

d) Niech $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Wyznaczyć wszystkie otwarto-domknięte podzbiory jednoelementowe X.

Zad 2. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Udowodnić, że jeśli zbiór G jest otwarty, to

$$\text{a)} \quad G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}, \qquad \text{b)} \quad \overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}, \qquad \text{c)} \quad \overline{G} = \overline{\mathrm{Int}\,(\overline{G})}.$$

Zad 3. n-tą pochodną $A^{(n)}$ zbioru A określamy indukcyjnie wzorami $A^{(1)} = A^d$, $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^d$. Udowodnić że dla dowolnych dwóch zbiorów A i B w przestrzeni topologicznej X spełnione są następujące relacje

a) $A \subset B \Rightarrow A^d \subset B^d$, b) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$, c) $(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$,

d) $A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$ (przy dodatkowym założeniu, że X jest $\mathcal{T}_1$-przestrzenią).

Zad 4. Skonstruować podzbiór prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ posiadający n różnych pochodnych.

Zad 5. W dowolnej przestrzeni topologicznej X udowodnić następujące zależności

a) $A \cup \mathrm{Fr}(A) = \overline{A}$, b) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, c) $\mathrm{Fr}(A) = \big(A \cap \overline{X \setminus A}\big) \cup \big(\overline{A} \setminus A\big)$,

d) $\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) = \mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup \big(\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)\big)$, e) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}\,(A)) \subset \mathrm{Fr}(A)$,

f) $A = \overline{A} \iff \mathrm{Fr}(A) = A \cap \overline{X \setminus A}$, g) $A = \mathrm{Int}\,(A) \iff \mathrm{Fr}(A) = A \cap \overline{X \setminus A}$,

h) A jest różnicą dwóch zbiorów domkniętych $\iff$ zbiór $\overline{A} \setminus A$ jest domklnięty.

Zad 6. Pokazać, że rodzina $\mathcal{B} = \{(a,b) \times \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$ jest bazą topologii na $\mathbb{R}^2$. Porównać tę topologię z topologią euklidesową oraz wyznaczyć wnętrza oraz domknięcia zbiorów $A = \{(x,y) : x - 1 < y < x + 1\}$, $B = \{(x,y) : -1 \le y \le 1\}$, $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Zad 7. Czy rodzina $\mathcal{B} = \{[a,b), (a,b] : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$ jest bazą pewnej topologii na $\mathbb{R}$.

Zad 8. Pokazać, że istnieje baza przeliczalna wprowadzająca na $\mathbb{R}$ topologie euklidesową.

Zad 9. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologi na $\mathbb{R}$ składająca sie z przedziałów (a,b), $a < b$. Pokazać, że topologia płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ pokrywa się z topologią wprowadzona przez bazę $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Zad 10. Pokazać, że rodziny $\mathcal{B}_{[\,)} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_{(\,]} = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ są bazami pewnych topologii na $\mathbb{R}$, które oznaczać będziemy odpowiednio przez $\tau_{[\,)}$ i $\tau_{(\,]}$.
a) Czy topologie $\tau_{[\,)}$, $\tau_{(\,]}$ są uboższe, czy bogatsze od topologi euklidesowej?
b) Czy ciągi $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ są zbieżne w topologii $\tau_{[\,)}$ lub $\tau_{(\,]}$?
c) Pokazać, że $\tau_{[\,)} \cap \tau_{(\,]}$ jest topologią na $\mathbb{R}$. Co to za topologia?
d) Opisać topologię generowaną przez $\tau_{[\,)} \cup \tau_{(\,]}$.

Zad 11. Niech $X = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Pokazać, że rodzina

$$\mathcal{B} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, ...\} \cup \{U \subset X : \ X \setminus U \text{ zbiór skończony i } x_0 \in U\}$$

jest bazą pewnej topologi na X. Opisać operację wnętrza i operacje domknięcia w tej topologii.